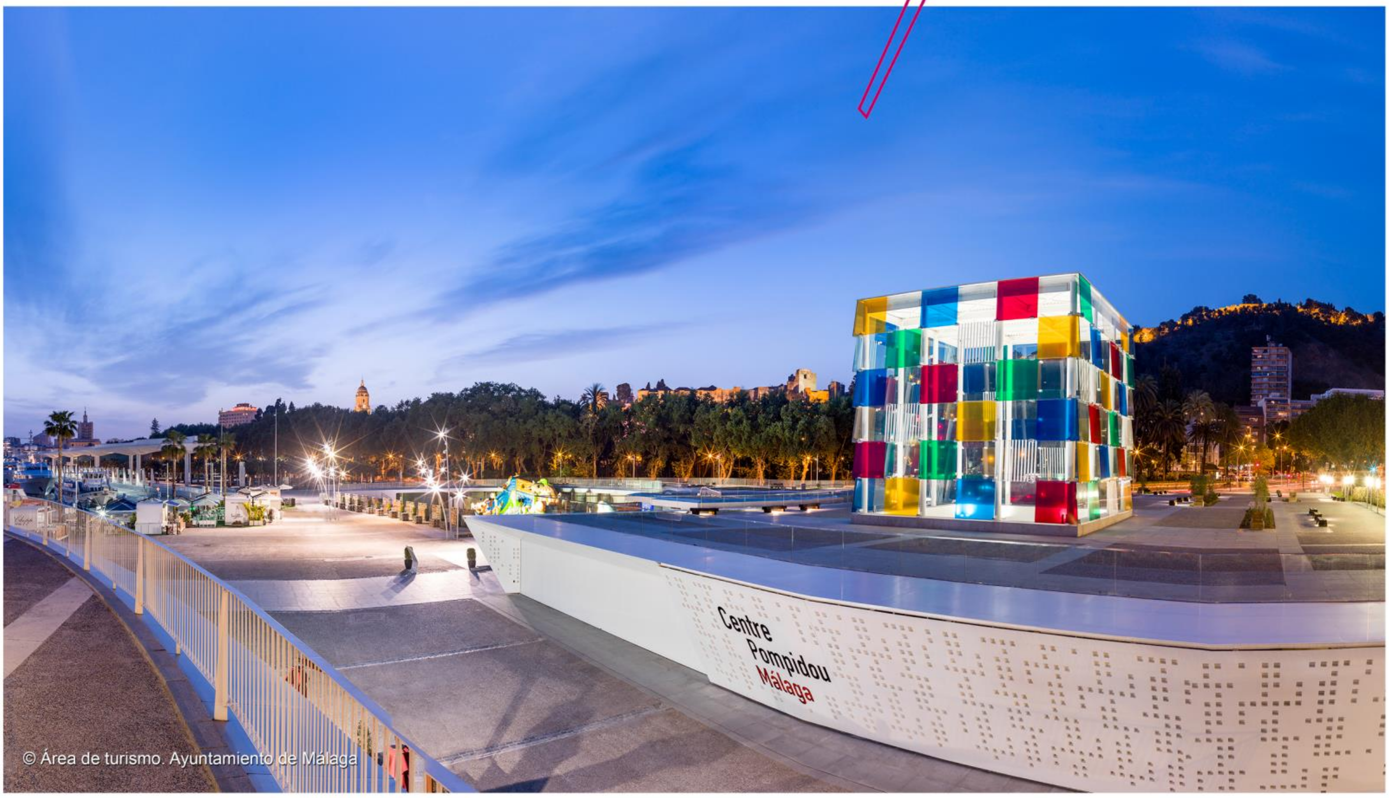
Investigación en Educación Matemática XX

XX SEIEM
Málaga 2016



8, 9 y 10 de septiembre de 2016
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Málaga

Editores
Juan Antonio Macías, Antonio Jiménez, José Luis González, María Teresa Sánchez, Pedro Hernández, Catalina Fernández, Francisco José Ruiz, Teresa Fernández y Ainhoa Berciano

Ayuntamiento de Málaga · Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Málaga · Universidad de Málaga · Didáctica de la Matemática U.M.A. - España · SEIEM · Málaga Convention Bureau

Investigación en Educación Matemática
XX

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Investigación en Educación Matemática XX

Juan Antonio Macías, Antonio Jiménez, José Luis González, María Teresa Sánchez, Pedro Hernández, Catalina Fernández, Francisco José Ruiz, Teresa Fernández y Ainhoa Berciano (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Málaga, 8, 9 y 10 de septiembre de 2016

Edición científica

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

Juan Antonio Macías García, Antonio Jiménez Fernández,
José Luis González Mari, María Teresa Sánchez Compaña,
Pedro Hernández Hernández, Catalina Fernández Escalona,
Francisco José Ruiz Rey, Teresa Fernández Blanco,
Ainhoa Berciano Alcaraz.

Diseño del logo: Juan Antonio Macías García.
Diseño de la portada: José Ramón San José.

ISBN: 978-84-9747-948-6

Cítese como:

J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (eds.), (2016). Investigación en Educación Matemática XX. Málaga: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

RELACIONES FUNCIONALES QUE EVIDENCIAN ESTUDIANTES DE TERCERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN QUE USAN

Functional relationships evidenced by third graders and the representation they systems used

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo está integrado en una investigación más general cuyo interés es el estudio del pensamiento funcional que muestran estudiantes de educación primaria. Esta investigación es parte de un experimento de enseñanza de cuatro sesiones, en donde nos centramos en la última de estas, específicamente en las relaciones funcionales que identifican alumnos de tercero de educación primaria en la resolución del problema de las baldosas y los sistemas de representación que emplean aquellos que identifican relaciones funcionales. Los estudiantes participantes en nuestro estudio evidencian relaciones funcionales de correspondencia y covariación, predominando la primera. Utilizan con mayor frecuencia los sistemas de representación numérico y verbal y, en menor medida, el manipulativo y pictórico. Observamos también el uso de representaciones múltiples.

Palabras clave: *pensamiento algebraico, pensamiento funcional, sistemas de representación*

Abstract

This work is part of a wider investigation focussed on elementary students' functional thinking. This research is part of a teaching experiment of four sessions, where we focus on the last one, specifically we focus here on the functional relationships that third graders identify when solving the tiles problem. We also describe the representation systems that these students use. They evidence correspondence and covariation relationships, with predominance of the first one. These students use numerical and verbal representation systems most frequently numerical, and manipulative and pictorial representations, with less frequency. We also observe the use of multiple representations.

Keywords: *algebraic thinking, functional thinking, representation systems*

La investigación que presentamos se enmarca en la propuesta *early algebra,* la cual promueve la introducción del álgebra escolar, a través del pensamiento algebraico, desde los primeros niveles educativos (e.g., Blanton, 2008; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006). Kaput (2008) considera que el pensamiento algebraico impregna la forma en que los sujetos hacen, piensan y hablan sobre las matemáticas, relacionando así el álgebra con la propia actividad humana y de la cual puede emerger. Cuando el foco matemático del pensamiento algebraico son las funciones, se habla del pensamiento funcional (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016), para el que es fundamental el concepto de función, la relación entre cantidades involucradas y la variación conjunta entre ellas. Algunos investigadores han precisado el constructo "pensamiento funcional" en los términos que describimos a continuación. "Se centra en la relación entre dos (o más) variables; específicamente los tipos de pensamiento que van desde relaciones específicas a generalizaciones de relaciones" (Kaput, 2008, p. 143). El pensamiento funcional es "un proceso de construcción, descripción y

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga: SEIEM.

razonamiento con y sobre las funciones. Este envuelve el pensamiento algebraico ya que incluye la construcción de una generalización sobre variables que se encuentran relacionadas" (Blanton, 2008, p. 30). Consideramos que el pensamiento funcional es una actividad cognitiva que se inicia y desarrolla al trabajar sobre las relaciones entre cantidades, específicamente cuando se ponen en funcionamiento conceptos determinados para responder a cuestiones específicas.

En los últimos años, se encuentran contenidos relacionados con el pensamiento funcional en los documentos curriculares de diferentes países (Merino, Cañadas y Molina, 2013). Algunos de esos documentos parten del marco teórico de Confrey y Smith (1991) para la enseñanza de las funciones, con base en la resolución de problemas en situaciones contextuales. Los autores señalados recogen la noción matemática de relación funcional para presentar dos aproximaciones para la enseñanza de las funciones. Posteriormente Smith (2008) define tres tipos de relaciones funcionales: (a) recurrencia, que supone identificar el patrón en una secuencia de valores; (b) correspondencia, en la que hace hincapié en la relación entre los pares correspondientes de la variable; y (c) covariación, en donde el foco se encuentra dado por el análisis de cómo dos cantidades varían al mismo tiempo y cómo los cambios que se producen en una afectan a la otra.

Las representaciones matemáticas corresponden a "aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas" (Rico, 2009, p. 3). Es así como las representaciones permiten a los sujetos establecer una forma de acercarse y entablar una relación con un determinado objeto matemático, entre las cuales se distinguen dos: simbólicas y gráficas. Las diferentes formas de representación o formas de expresar un determinado concepto matemático da origen a los sistemas de representación, que para Castro, Rico y Romero (1997) son entendidos como una manera de expresar y simbolizar ciertas estructuras numéricas mediante el uso de signos, reglas y enunciados, en donde los sistemas de representación por sí solo no agotan al concepto al cual representan. Por su parte Goldin y Shteingold (2001) indican que cada sistema de representación se encuentra regulado por un conjunto de reglas que están condicionadas por las matemáticas y por el concepto matemático específico. Sobre las funcionalidades de un sistema de representación, Kaput (1992) indica que estos son un sistema de reglas para identificar o crear caracteres, operar sobre y con ellos y establecer relaciones entre ellos. Tal como se ha indicado, un objeto matemático se puede expresar a través de diferentes sistemas de representación y en el caso del álgebra escolar, Molina (2014) destaca que "conviven diferentes sistemas de representación externas que ayudan a hacer presentes los objetos matemáticos abstractos" (p. 559), entre los cuales se encuentran, principalmente el lenguaje verbal, el simbolismo algebraico y los sistemas de representación tabular, gráfico y numérico.

Confrey y Smith (1991) recomiendan el uso de representaciones múltiples y transformaciones entre esas representaciones para la enseñanza de las funciones, en donde el uso de las representaciones permitiría que el sujeto exprese sus propias ideas sobre las funciones. Las representaciones múltiples implican el proceso de representar un objeto matemático de dos o más formas diferentes, y a su vez, se logre realizar traducciones entre ellas (Janvier, 1987). Cañadas y Figueiras (2011) denominan representación sintética a la combinación de dos o más representaciones, que al ser analizadas de manera aislada no aportan información específica sobre el proceso que está llevando a cabo el estudiante. Desde las ideas anteriores, definiremos representaciones múltiples como el empleo de dos o más representaciones en las cuales se apoya un determinado sujeto, en donde ambas entregan información que no podría ser analizada al considerarla por separadas.

Algunos estudios relacionados con el pensamiento funcional realizados recientemente en diferentes cursos de educación primaria dan cuenta de la posibilidad de fomentar y desarrollar este tipo de pensamiento algebraico en la educación primaria. Blanton, Brizuela, Murphy, Sawrey y Newman-Owens (2015) exploran sobre el pensamiento de los estudiantes al generalizar relaciones funcionales, llegando a identificar diferentes niveles al pensar sobre este tipo de relaciones. Cañadas y Fuentes (2015) describen las estrategias y sistemas de representación que empelan un grupo de estudiantes de primero de educación primaria en la resolución de un problema que involucra la relación funcional $f(x)=5x$. Estos estudiantes emplearon los sistemas de representación pictórico, simbólico y verbal. El sistema de representación pictórico fue el más frecuentemente utilizado, a excepción de una cuestión del problema donde se les preguntaba sobre generalización, donde el sistema de representación verbal fue el predominante. También se observan representaciones múltiples, destacando el uso de los sistemas de representación pictórico y numérico. Merino, Cañadas y Molina (2013) llevan a cabo una investigación sobre las estrategias y representaciones que utilizan estudiantes de quinto de educación primaria al trabajar una tarea de generalización que involucra la función $f(x)=2x+2$. Los principales resultados dan cuenta de la diversidad de sistemas de representación utilizados. La mayoría de estos alumnos emplearon representaciones múltiples. Destaca la combinación entre los sistemas de representación pictórico y verbal y, en menor medida, numérica y verbal.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo abordamos tres objetivos de investigación.

1. Identificar si los estudiantes de tercer curso de primaria dan muestra de pensamiento funcional.

2. Describir las relaciones funcionales que utilizan aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional.

3. Describir los sistemas de representación en los cuales se apoyan aquellos estudiantes que manifiesten pensamiento funcional.

MÉTODO

En este apartado describimos los sujetos participantes en la investigación, cómo diseñamos e implementamos la recogida de información y cómo llevamos a cabo el análisis de datos.

Sujetos

Trabajamos con un grupo de 24 estudiantes de tercero de educación primaria (8-9 años). La muestra fue intencional, según la disponibilidad del centro y de los docentes del mismo. Los estudiantes no habían trabajado previamente con problemas que involucraban relaciones funcionales anteriormente a nuestra intervención en el aula.

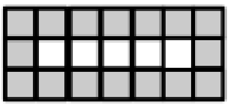
Recogida de información: experimento de enseñanza e instrumentos

Este trabajo se enmarca en una investigación más amplia centrada en tercero de educación primaria, en la que se lleva a cabo un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Por la naturaleza de la investigación, en cada sesión planteamos un problema contextualizado en el que aparecía involucrado una función lineal. En este estudio nos centramos en la cuarta y última sesión, específicamente en las respuestas escritas que brindan los estudiantes a un cuestionario. Esta sesión se corresponde con el último ciclo del experimento de enseñanza. Justificamos esta elección con base en la relación funcional implicada en el problema trabajado, que involucra tanto la estructura aditiva como la multiplicativa, y por ser la última que realizamos con ellos y estar los estudiantes más familiarizados con el equipo de investigación.

La sesión tuvo una duración de 120 minutos y tuvo varias partes. En la primera, la profesora-investigadora introdujo el problema. En la segunda, los alumnos trabajaban en gran grupo (puesta en común) sobre casos particulares relativos al problema. En la tercera, los alumnos trabajaban individualmente en cuestionarios individuales, aunque podían hablar con sus compañeros. El equipo de investigación (profesora-investigadora e investigadora de apoyo) resolvía dudas sobre la realización del trabajo de los alumnos. En la cuarta parte, se hizo una puesta en común en gran grupo sobre el trabajo realizado en las fichas con la guía de la profesora-investigadora. Un tercer investigador grabó la sesión con videocámara y registró notas significativas para la investigación. El análisis de datos que realizamos aquí se refiere al cuestionario individual en el que trabajaron los estudiantes.

El cuestionario empleado estaba conformado por una situación problema que responde a la función $f(x) = 2x+6$, tal como se presenta en la figura 1. Además, dejamos materiales manipulativos que representaban los diferentes tipos de baldosas (cuadrados blancos y grises), por si querían utilizarlos en la resolución.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

Figura 1. Problema de las baldosas

A continuación de la presentación, planteamos las siguientes cuestiones, donde se solicitaban las respuestas y la justificación de las mismas.

C1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

C2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

C3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

C4A. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

C4B. Ahora hazlo de una forma diferente y explícalo aquí.

C5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

C6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

C7. En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

Análisis de datos

Analizamos las respuestas escritas de los estudiantes en los cuestionarios. Para la codificación de las respuestas de los alumnos, a cada uno de estos se le atribuyó un código específico, según la ubicación en la que se encontraban en el aula (Ai, con i=1, … 30). Para el análisis de la información, consideramos dos focos, que responden a los objetivos presentados: (a) relaciones funcionales y (b) sistemas de representación.

Para la determinación de aquellos estudiantes en los que es posible identificar una manifestación de pensamiento funcional en sus respuestas, nos centramos en la totalidad de respuestas entregadas por dicho estudiante, analizándolas de forma conjunta (Cañadas, en prensa). De este modo, consideramos que un estudiante pone de manifiesto pensamiento funcional cuando en dos o más respuestas se identifican una relación funcional.

Para abordar el objetivo relativo a las relaciones funcionales, consideramos las categorías que se corresponden con las relaciones funcionales descritas en el marco teórico: (a) recurrencia, (b) correspondencia y (c) covariación. Análogamente, sobre los sistemas de representación, consideramos los mencionados en el marco teórico, tomando las características específicas de la tarea: (a) verbal, (b) simbolismo numérico, (c) simbolismo algebraico, (d) pictórico y (e) manipulativo. Los sistemas de representación no son mutualmente excluyentes por lo que, para el análisis consideramos la posibilidad de que aparecieran representaciones múltiples y/o sintéticas.

RESULTADOS

Todos los estudiantes respondieron a las tres primeras cuestiones del problema. En C4A. un estudiante no respondió, y en C4B., diez estudiantes no entregaron una respuesta escrita. En C5, C6 y C7 la cantidad promedio de alumnos que no respondieron las cuestiones es de ocho.

A continuación presentamos los resultados organizados según los dos focos de este trabajo: relaciones funcionales y sistemas de representación.

Relaciones funcionales

El estudiante A22 es un caso donde consideramos que manifiesta pensamiento funcional porque en más de dos cuestiones responde siguiendo una misma relación (ver figuras 2, 3 y 4).

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

16

¿Cómo lo sabes?

Porque 7+7+2=16

Figura 2. Respuestas de A22 en C1

2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

22

¿Cómo lo sabes?

Porque 10+10+2=22

Figura 3. Respuestas de A22 en C2

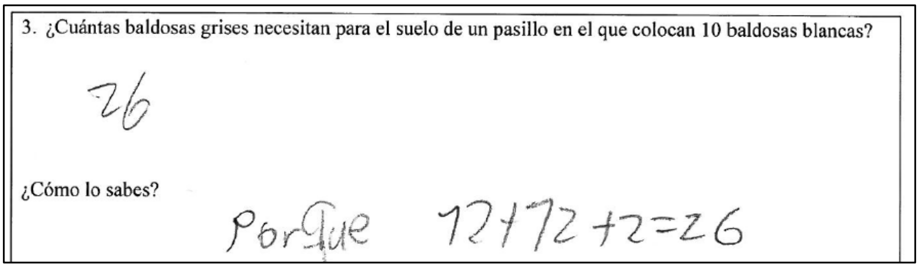


Figura 4. Respuestas de A22 en C3

Como se observa en la figura 2, este estudiante considera el número de baldosas blancas dadas (5) y le añade dos (7). Así, tendría el número de baldosas grises en uno de los laterales (superior o inferior). A continuación, suma ese número consigo mismo (7+7), con lo que obtiene el número de baldosas grises en los laterales superior e inferior de las baldosas blancas. Finalmente, añade dos, que se corresponden con las baldosas a los lados derecho e izquierdo de las baldosas blancas (7+7+2). Utiliza esta misma relación funcional para los casos de 8 y 10 baldosas blancas (ver figuras 3 y 4). En los tres casos, se observa que relaciona pares de valores (a, $f(a)$) para valores de a correspondientes a los casos particulares (5, 8 y 10), y establece la relación con los números de baldosas grises 16, 22 y 26, respectivamente. Por eso interpretamos que la estudiante identifica una relación de correspondencia.

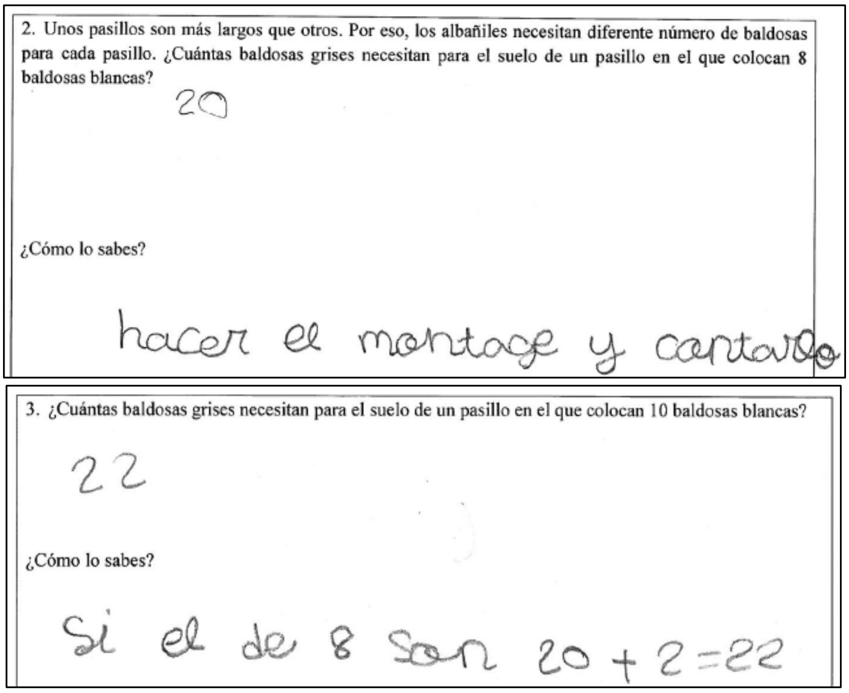
En síntesis, del total de respuestas analizadas, 11 estudiantes manifiestan pensamiento funcional, mientras que en 13 de ellos no es posible determinar este tipo de pensamiento a partir de sus respuestas. Sobre las relaciones funcionales que utilizan los 11 alumnos que ponen de manifiesto este tipo de pensamiento a través de las cuestiones planteadas, ningún estudiante pone de manifiesto la relación de recurrencia. En la tabla 1 presentamos las relaciones funcionales que emplean aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional, por cada una de las cuestiones.

Tabla 1. Relaciones funcionales utilizadas por los estudiantes en cada cuestión

	Cuestiones															
	C1		C2		C3		C4A		C4B		C5		C6		C7	
	Relación funcional															
Alumno	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv
A3						✓	✓				✓			✓	✓	
A5	✓		✓		✓		✓									
A6	✓		✓		✓		✓		✓			✓			✓	
A9			✓		✓		✓		✓			✓	✓		✓	
A11	✓		✓				✓		✓		✓		✓		✓	
A12				✓		✓										
A13					✓		✓		✓							
A14			✓		✓		✓		✓						✓	
A19	✓				✓											
A22	✓		✓		✓		✓		✓			✓	✓		✓	
A24					✓		✓		✓		✓					

Nota. C1, C2, C3, C4.A, C4.B, C5, C6, C7 = cuestiones; Cr = correlación; Cv = covariación

La mayoría de las relaciones funcionales que evidencian los estudiantes de tercero son de correspondencia. También encontramos ejemplos de relaciones de covariación. En la figura 5 presentamos un ejemplo.


2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

20

¿Cómo lo sabes?

hacer el montage y contarlo

3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

22

¿Cómo lo sabes?

Si el de 8 son 20 + 2 = 22

Figura 5. Respuestas de A3 en C2 y C3

La estudiante, a pesar de entregar una respuesta errónea, al responder la tercera pregunta utiliza el resultado obtenido en la pregunta anterior, sobre la que construye un procedimiento (sumar 2) para llegar a la respuesta. En este caso, observamos que la estudiante se centra en la variación que hay en el número de baldosas blancas (entre 8 y 10, hay un aumento de dos baldosas blancas) para calcular el número de baldosas grises, para las que concluye que la variación también ha de ser de dos. Por tanto, puesto que se centra en cómo la variación entre dos valores de la variable independiente afecta a la variación que se produce entre dos valores de la variable dependiente, se trata de una relación de covariación.

Sistemas de representación

En la tabla 2 organizamos los resultados relativos a los sistemas de representación empleados por los estudiantes en cada una de las cuestiones.

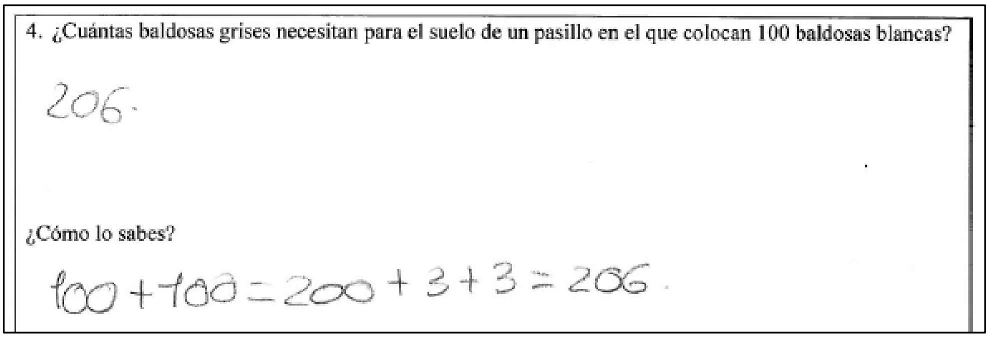
Tabla 2. Sistemas de representación empleados por cuestión

Alumno	C1	C2	C3	C4A.	C4B.	C5	C6	C7
A3	p	m	v; n	n	n	v	v	n
A5	n	n	n	n	0	0	0	0
A6	v	v	n	n	n	v	v	n
A9	p	n	n	n	v	v	v	v
A11	v	v; n	v	v; n	n	v; n	v; n	v; n
A12	v	v; n	n	n	v; n	v	0	0
A13	p	m	v	v	n	m	m	m
A14	p	v	v; n	n	n	v	v	v
A19	p; n	v	v; n	n	0	n	p	p
A22	n	n	n	n	v	v	n	n
A24	p	m	v; n	n	v; n	p	m	m

Nota. p = pictórico; n = numérico; v = verbal; m = manipulativo

La mayoría de los estudiantes emplean sistemas de representación verbal y numérico y, en menor medida, representaciones pictóricas y manipulativas. Los alumnos no emplean el simbolismo algebraico en ningún caso.

La figura 6 da cuenta del sistema de representación numérico en la argumentación del procedimiento utilizado.


4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

206.

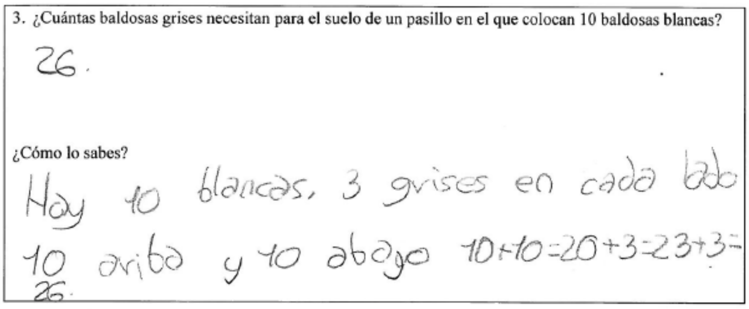
¿Cómo lo sabes?

100 + 100 = 200 + 3 + 3 = 206.

Figura 6. Sistema de representación numérico empleado por A24 en C4A

Un ejemplo de un sistema de representación verbal está presente en la respuesta de A6 al responder la cuestión 1, quien establece en su justificación: “tienes que tener tres en cada lado y serían 6 y quedarían 10 = 16”.

Si bien hay respuestas en las cuales solo es posible determinar un tipo de sistema de representación empleado, destacamos algunas respuestas en las cuales es posible identificar dos sistemas de representación diferentes en los cuales se apoyan los estudiantes para establecer la relación funcional: representaciones múltiples (ver figura 7).


3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

26.

¿Cómo lo sabes?

Hay 10 blancas, 3 grises en cada lado 10 arriba y 10 abajo 10+10=20+3=23+3=26.

Figura 7. Sistema de representación múltiple de A24 en cuestión 3

En la figura 7 se observa que ambos sistemas de representación aportan información y, aunque tienen significados independientes, se necesitan para dar respuesta completa a la cuestión. Se considera una representación múltiple. En otros casos, observamos representaciones múltiples pero cada uno de los sistemas de representación no tienen significado por separado. Por ejemplo, A11 en la cuestión 6, expresa: “pues tres de los lados y 3 del otro lados 6, a 20 – 6 = 14 y la mitad de catorce 7. En total 7 baldosas”. También se presentan los sistemas de representación numérico y verbal pero cada uno de ellos no tiene significado por separado, considerándose representaciones sintéticas.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Las respuestas analizadas permiten abordar los objetivos de investigación planteados. Por un lado, hemos identificado los estudiantes de tercero de educación primaria que ponen de manifiesto pensamiento funcional en el problema planteado. Entre estos alumnos, hemos descrito el tipo de relación funcional que utilizan. Además, presentamos una primera aproximación al análisis de los sistemas de representación que estos estudiantes emplean en sus respuestas.

Referente a las relaciones funcionales, la correspondencia es la más empleada por estos estudiantes. La utilización con mayor frecuencia de esta relación funcional, entendida como la relación entre los pares correspondientes de la variable (Smith, 2008), es posible relacionarla con las experiencias a las cuales los estudiantes se encuentran más habituados, como puede ser el trabajo con patrones numéricos y la obtención de regularidades. En este sentido, parece que, de forma natural (porque no lo han trabajado en clase), los estudiantes han superado la relación de recurrencia, que es la que se suele trabajar a través de patrones en educación infantil y primeros cursos de educación primaria y se considera la más básica; pasando a relaciones en las que aparecen implicadas valores de las dos variables: correspondencia y covariación.

Los estudiantes participantes en la investigación utilizaron los sistemas verbal, numérico, pictórico y manipulativo. Consideramos que el empleo de sistemas de representación pictórico y manipulativo en las primeras cuestiones, donde los casos particulares correspondían con número pequeños. Sin embargo, en C4 se solicitaba determinar la cantidad de baldosas grises dadas 100 baldosas blancas, en donde no era posible manipular el material concreto entregado, así como el uso de sistemas de representación pictóricos no era factible de realizar dado el tiempo que requiere dicho procedimiento. El sistema de representación verbal aparece cuando los estudiantes explican sus respuestas, tal y como cabría esperar y como ha ocurrido en los antecedentes presentados con estudiantes de primero y quinto de educación primaria. A diferencia de los estudios anteriores, destacamos la escasa presencia del sistema de representación pictórico y la predominancia del numérico. Además, la inclusión del material manipulativo parece no haber tenido un impacto significativo, ya que fueron pocos los estudiantes que lo emplearon.

La existencia de sistemas de representaciones múltiples en algunas respuestas de los estudiantes, siguiendo las ideas de Confrey y Smith (1991), permiten analizar cómo dos diferentes sistemas se complementan entre sí y ambos permiten tener una comprensión más profunda de la idea matemática que subyace a la tarea. Complementando esta idea, Thompson y Chappell (2007) indican que estos tipos de representaciones han recibido la atención de los profesores de matemática como una posibilidad de que su uso facilite el aprendizaje de esta disciplina, asociada a la comprensión. Destacamos el uso de representaciones múltiples (algunas sintéticas) por algunos estudiantes, ya que nos permite identificar las relaciones y conexiones que los estudiantes pueden construir a partir del contenido matemático que subyace a la actividad.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y gracias a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), mediante su Programa de Formación de Capital Humano Avanzado a través de la Beca de Doctorado folio 72160307.

REFERENCIAS

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds´s thinking about generalizing functional relationship. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-559.

Cañadas, M. C. (en prensa). Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: un enfoque funcional. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas.*

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Carraher, D. W., Schliemann, A., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(2), 87-115.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th anual meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: Conference Committee.

Goldin, G y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the developments of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of functions as an example. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 67-72). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York, NY: Macmillan.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York; NY: Routledge.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: Indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, *17*(3), 559-579.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133-163). New York; NY: Routledge.

Thompson, D. R. y Chappell, M. F. (2007). Communication and representation as elements in mathematical literacy. *Reading & Writing Quarterly*, *23*(2), 179-196. http://doi.org/10.1080/10573560601158495